



# LONGEVITY

---

CHRESTEN DENG SØE OG JENS VESTERGAARD  
ATP'S AKTUARIAT

1. Indledning	4
2. Rapportens indhold	4
3. Datamaterialet	4
4. Lexis diagrammer	5
5. Beskrivelse af datamateriale ved hjælp af Lexis diagrammet	5
6. Bestemmelse af dødelighed	7
6.1 A-, B- og C-grupper af døde .....	7
6.2 Estimation af dødsintensiteten .....	8
6.3 Bestemmelse af antal dødsfald $O_{x,y}$ .....	9
6.4 Tilnærmelse af eksponeringen $E_{x,y}$ .....	9
6.5 Sammenligning af historisk dødelighed bestemt ud fra de tre grupper (A, B og C)....	9
7. Estimation af fremtidig dødelighed - populationsmetoden	10
7.1 Sammenligning af forventet restlevetid bestemt ved populationsmetoden for hver af de tre grupper (A, B og C) .....	10
8. Vurdering af populationsmetoden - dødelighed	11
8.1 Kerneudglatning i forbindelse med estimation af dødeligheden.....	12
8.2 Validering ved anvendelse af back-testing.....	13
8.2.1 Eksempel.....	13
8.3 Forholdet mellem estimerede og faktiske dødsintensiteter .....	14
8.3.1 Eksempel.....	15
8.4 Forholdet mellem estimerede og faktiske restlevetider.....	15
9. Vurdering af populationsmetoden - hensættelser	17
10. Vurdering af populationsmetoden - rentereduktion	20
11. Vurdering af dødeligheden - bestandsbetragtninger	22
11.1 Dødelighedens betydning for de samlede pensionsmæssige hensættelser.....	23
11.2 Vurdering af populationsmetoden – bestandsbetragtninger.....	24
12. Populationsmetoden - konklusioner	26
13. ATP's nuværende dødelighedsgrundlag	26
14. Det videre arbejde	28
15. Referencer	29
16. Formler m.v.	30
16.1 Anden metode til bestemmelse af eksponeringen .....	30
16.2 Bestemmelse af $\tilde{N}_{x,y}$ .....	30

16.3 Bestemmelse af forventet restlevetid .....	31
16.4 Bestemmelse af livsvarig livrente .....	32
17. SAS-programmer	33
Appendiks 1	34
Appendiks 2	36

## 1. Indledning

Danskerne bliver ældre og ældre. Lidt mere teknisk formuleret har middellevetiden i en længere periode været stigende i Danmark (som i en række andre lande). En stigende middellevetid kaldes også longevity.

Den længere levetid har stor betydning for ATP, hvis primære opgave er at yde en livslang pension.

ATP har allerede foretaget de første (aktuartechniske) skridt i relation til longevity. Ved årsskiftet 1998/1999 overgik ATP således til et dynamisk dødelighedsgrundlag, dvs. forudsætningerne vedrørende dødelighed opdateres årligt svarende til den seneste observerede dødelighed i ATP's bestand.

Formålet med denne rapport er, at

- belyse den overordnede udvikling i dødeligheden i perioden 1835-2001 i Danmark
- vurdere behovet for yderligere (aktuartechniske) skridt i relation til longevity
- foreslå eventuelle fremtidige tiltag i ATP

## 2. Rapportens indhold

Rapporten består af følgende dele:

- beskrivelse af det anvendte datamateriale
- diskussion af metoder til dødelighedsundersøgelse baseret på dette materiale
- analyser af dødeligheden baseret på datamaterialet
- evaluering af ATP's dødelighedsgrundlag
- anbefalinger

Vi har tilstræbt en grundig dokumentation af vores overvejelser og resultater. Vi har bl.a. valgt at afslutte rapporten med et kapitel, som angiver, hvorledes anvendte formler er udledt, og hvilke (SAS-) programmer, der er benyttet.

## 3. Datamaterialet

Datamaterialet indeholder dels folketal og dels antal dødsfald i Danmark fra 1835 frem til og med 2001.

For et givet kalenderår er datamaterialet opdelt efter fødselsår og indeholder således for hvert fødselsår (og for hvert køn):

1. antal personer i befolkningen den 1. januar
2. antal dødsfald opdelt i 1-års aldersintervaller

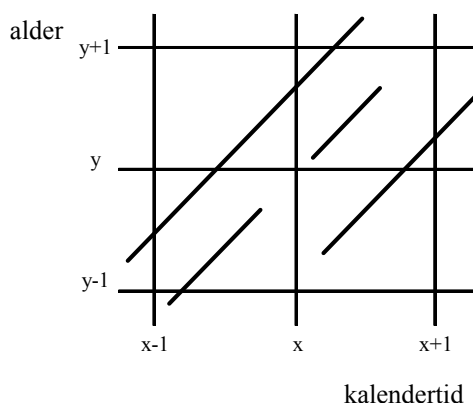
Datamaterialet fra 1835 og frem til og med 1995 er stillet til rådighed af Peter Fledelius, men er oprindeligt indsamlet fra Danmarks Statistik af Kirill Andreev til brug for dennes Ph.d.-afhandling, se Andreev (1999). Datamaterialet for perioden 1996 til 2001 er baseret på befolkningsregnskaber indhentet direkte fra Danmarks Statistik.

I resten af denne rapport vil vi benytte betegnelsen kohorte for fødselsår.

#### 4. Lexis diagrammer

Demografiske oplysninger (fx om dødelighed) beskrives ofte ved hjælp af Lexis diagrammer (introduceret af Lexis i 1875).

I Lexis diagrammet (som det oftest benyttes i dag) udgøres abscissen af kalendertiden, mens ordinaten udgøres af alderen. Det enkelte individ er repræsenteret ved en linie svarende til de aldre og den kalendertid, som vedkommende er under observation. Linierne i Lexis diagrammer kan være brudte, fx hvis det anvendes på befolkningen, hvor personer udvandrer og senere indvandrer igen. Se nedenstående figur 1.



figur 1

For en glimrende gennemgang af Lexis diagrammet henvises til Keiding (1990).

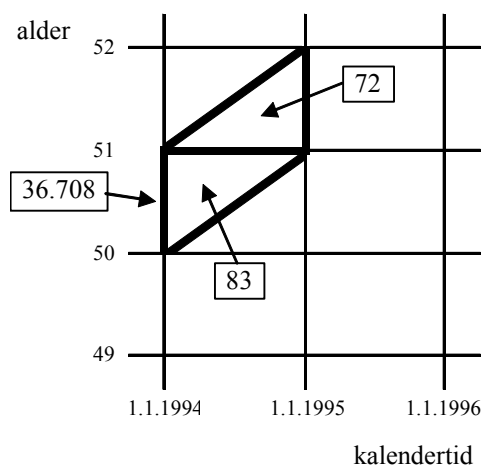
#### 5. Beskrivelse af datamateriale ved hjælp af Lexis diagrammet

Vi tager i første omgang udgangspunkt i et konkret kalenderår og en konkret kohorte. Dette datamateriale beskrives dernæst ved hjælp af Lexis diagrammet. Efterfølgende formaliserer vi denne beskrivelse for vilkårligt kalenderår og vilkårlig kohorte.

For året 1994 er der registreret følgende vedrørende kohorte 1943:

Kohorte	Alder	Population	Antal dødsfald	Timing <sup>1</sup>	Kalenderår
1943	50	36.708	83	2	1994
1943	51	36.641	72	1	1994

Disse registreringer kan illustreres i et Lexis-diagram som følger (figur 2):



figur 2

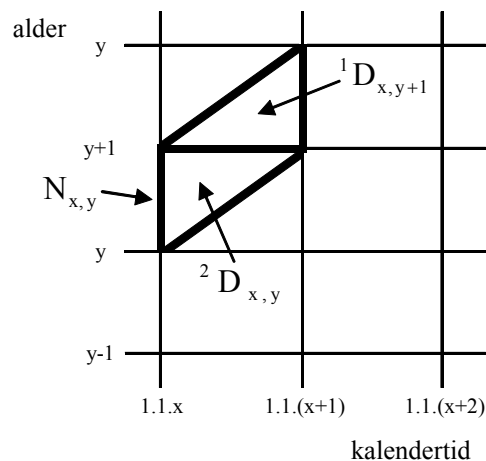
(Antallet 36.641 under kolonne "population" vedrørende timing 1 refererer til populationen opgjort som de, der fylder 51 år i løbet af 1994. Se også nedenstående fodnote eller afsnit 16.1.)

Formaliseret kan datamaterialet beskrives som følger:

For et givet kalenderår  $x$  er datamaterialet som nævnt opdelt kohortevis (for hvert køn).

For kohorten, der er fyldt  $y$  år primo kalenderår  $x$  (dvs. kohorten  $x-y-1$ ), indeholder datamaterialet således (figur 3):

<sup>1</sup> Andreev (1999) opgør populationen på to forskellige måder: Dels populationen pr. 1.1 et givet kalenderår (timing 2), dels populationen, der fylder en given alder i løbet af et givet kalenderår (timing 1). Denne opdeling har vi videreført i datamaterialet, som ligger til grund for denne rapport. Rapportens analyser er dog alene baseret på populationen for timing 2, dvs. populationen opgjort den 1.1. Vi bemærker, at Andreev (1999) betegner populationen for timing 2 som "cross-year population", mens den for timing 1 betegnes "cross-age population". Se Andreev (1999), s. 70, eller denne rapport's afsnit 16.1.



figur 3

Her er:

1.  $N_{x,y}$ : Antal personer pr. 1.1.x for kohorten x-y-1
2.  ${}^2D_{x,y}$ : Antal personer, som er død i alder y i år x, for kohorten x-y-1
3.  ${}^1D_{x,y+1}$ : Antal personer, som er død i alder y+1 i år x, for kohorten x-y-1

Vi benytter de angivne topræfikser "2" og "1" vedrørende antal dødsfald for at bringe notationen i overensstemmelse med Andreev (1999).

## 6. Bestemmelse af dødelighed

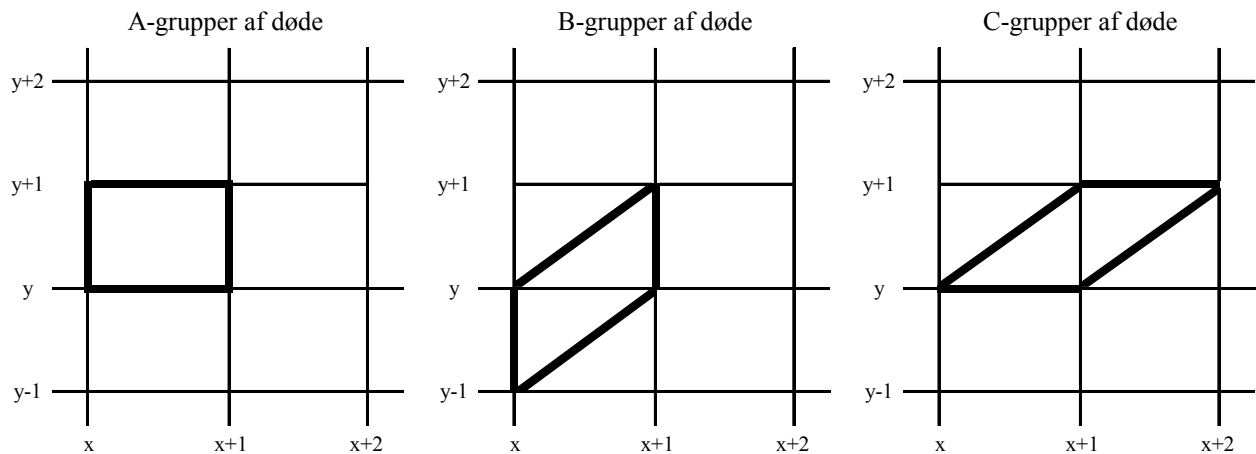
Dødeligheden kan angives både som en sandsynlighed og som en intensitet. Vi har valgt at angive dødeligheden som en intensitet, da det ofte er mere hensigtsmæssigt at arbejde med denne.

### 6.1 A-, B- og C-grupper af døde

Når vi ønsker at bestemme dødeligheden ud fra det givne datamateriale, er der i traditionel demografisk teori (se fx Matthiessen (1970)) angivet tre forskellige måder at opgøre dødeligheden på:

- A-grupper af døde: Antallet af døde opgjort efter kalenderår og alder.
- B-grupper af døde: Antallet af døde opgjort efter kohorte og kalenderår.
- C-grupper af døde: Antallet af døde opgjort efter kohorte og alder.

Nedenfor er de tre grupper af døde illustreret i Lexis diagrammet (figur 4):



figur 4

De tre grupper illustrerer et valg imellem hvilke to af følgende tre parametre

1. alder,
2. kohorten, eller
3. kalenderåret,

som vi tillægger størst vægt i analyserne (de tre parametres betydning for dødeligheden er indbyrdes afhængige).

Vi vil betegne grupperne af døde ved A-, B- og C-grupper.

I afsnit 7.1 har vi sammenlignet forventede restlevetider ved anvendelse af hver af de tre grupper.

## 6.2 Estimation af dødsintensiteten

Det er velkendt fra estimationsteorien (se fx Borgan (1986)), at ved en fuldstændig observationsplan er Maximum-Likelihood (ML) estimatoren for dødsintensiteten, der antages stykkevis konstant i hver alder y, givet ved occurrence/exposure-rater (O/E-rater), dvs.

$$\hat{\mu}_y = \frac{O_y}{E_y} \quad (6.2.1)$$

Her er  $\mu_y$  dødsintensiteten i alder y,  $O_y$  det observerede antal dødsfald og  $E_y$  den samlede eksponeringstid i samme alder.

Vi benytter denne estimator ved anvendelse af A-, B- og C-grupperne, dvs. at dødsintensiteten estimeres ved

$$\hat{\mu}_{x,y}^i = \frac{O_{x,y}^i}{E_{x,y}^i}, \quad i = A, B \text{ eller } C \quad (6.2.2)$$



Her refererer  $x$  og  $y$  til det fremhævede område angivet i figur 4 for den betragtede gruppe af døde. Endvidere er A, B eller C (med oplagt identifikation) en kort skrivemåde for denne gruppe.

Vi underforstår, at estimatoren afhænger af kønnet. Denne manglende angivelse af kønnet er også gennemført nedenfor for de undersøgte størrelser, når det ikke er meningsforstyrrende.

Observerede antal dødsfald,  $O_{x,y}^i$ ,  $i = A, B$  eller  $C$ , bestemmes uanset grupper direkte ud fra  ${}^1D_{x,y}$  - og  ${}^2D_{x,y}$  -erne, se afsnit 6.3.

Da datamaterialet ikke indeholder tidspunkterne for dødsfaldene, vil vi tilnærme eksponeringen  $E_{x,y}^i$ ,  $i = A, B$  eller  $C$ , ved hjælp af  $N_{x,y}$  -erne, se afsnit 6.4.

### 6.3 Bestemmelse af antal dødsfald $O_{x,y}$

Vi bestemmer antal dødsfald ved:

$$O_{x,y}^A = {}^1D_{x,y} + {}^2D_{x,y} \quad (6.3.1)$$

$$O_{x,y}^B = {}^1D_{x,y} + {}^2D_{x,y-1} \quad (6.3.2)$$

$$O_{x,y}^C = {}^1D_{x,y} + {}^2D_{x+1,y} \quad (6.3.3)$$

### 6.4 Tilnærmelse af eksponeringen $E_{x,y}$

Vi bestemmer eksponeringen ved:

$$E_{x,y}^A = \frac{1}{2} \times (N_{x,y} + N_{x+1,y}) \quad (6.4.1)$$

$$E_{x,y}^B = \frac{1}{2} \times (N_{x,y-1} + N_{x+1,y}) \quad (6.4.2)$$

$$E_{x,y}^C = N_{x+1,y} \quad (6.4.3)$$

(vi har beskrevet andre metoder for tilnærmelse af eksponeringen i afsnit 16.1 og 16.2).

### 6.5 Sammenligning af historisk dødelighed bestemt ud fra de tre grupper (A, B og C)

Vi har foretaget en numerisk sammenligning af dødsintensiteten  $\mu_{x,y}$  estimeret ved anvendelse af hver af de tre grupper (A, B eller C).

Sammenligningen viser, at vurderet ud fra gennemsnittet over alle aldre og alle kalenderår regnet fra 1900 er relationen mellem  $\mu_{x,y}$  -erne for de enkelte grupper følgende:

$$\mu_{x,y}^A \geq \mu_{x,y}^C \geq \mu_{x,y}^B \quad (6.5.1)$$

Eller udtrykt ved et-årige overlevelsessandsynligheder:

$$p_{x,y}^B \geq p_{x,y}^C \geq p_{x,y}^A \quad (6.5.2)$$

Vi opnår dette resultat uvægtet og ved anvendelsen af eksponeringen som vægt samt både for mænd og kvinder hver for sig.

Dødeligheden er altså (gennemsnitligt) størst, når vi anvender A-grupper og mindst, når vi anvender B-grupper.

Forholdet angivet i (6.5.1) kan begrundes heuristisk med, at både  $\mu_{x,y}^A$  og  $\mu_{x,y}^C$  må være større end  $\mu_{x,y}^B$ , da personerne, der indgår i de to førstnævnte grupper, i gennemsnit er ca. ½ år ældre end personerne, der indgår i sidstnævnte gruppe for samme kalenderår  $x$  og alder  $y$ . Forholdet mellem  $\mu_{x,y}^A$  og  $\mu_{x,y}^C$  kan forklares med en longevity-effekt, idet der ved anvendelse af A-grupper indgår en ældre kohorte/et tidligere kalenderår end ved anvendelse af C-grupper.

## 7. Estimation af fremtidig dødelighed - populationsmetoden

Der findes forskellige metoder til estimation af fremtidig dødelighed. I denne rapport koncentrerer vi os om populationsmetoden. Populært sagt forudsætter denne metode, at den fremtidige dødelighed svarer til den seneste konstaterede dødelighed.

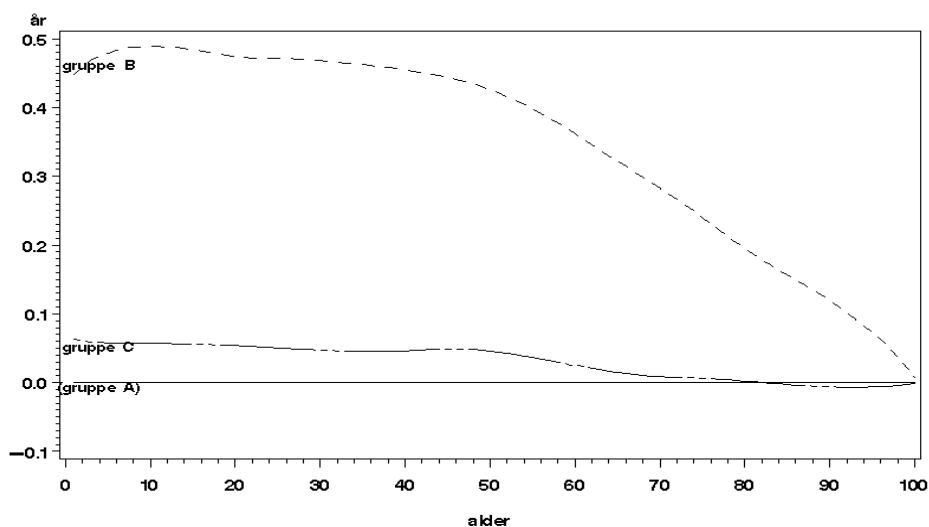
Lidt mere præcist vil vi betegne dødeligheden givet ved (6.2.2) for seneste års observationer som populationsmetoden, når den benyttes som estimator for den fremtidige dødelighed.

Vi bruger betegnelsen populationsmetode, uanset om vi vælger A-, B- eller C-grupper. Endvidere benytter vi også betegnelsen populationsmetode, når vi foretager kerneudglatning af dødeligheden givet ved (6.2.2).

### 7.1 Sammenligning af forventet restlevetid bestemt ved populationsmetoden for hver af de tre grupper (A, B og C)

I dette afsnit undersøger vi betydningen af at vælge A, B eller C-grupper. Som sammenligningsgrundlag har vi valgt at beregne forventede restlevetider med kerneudglattede dødeligheder (Kerneudglatningen er beskrevet yderligere i afsnit 8.1).

Mænd — forskel i forventet restlevetid målt ift. gruppe A for kalenderår 1990  
Dødelighed ifølge populationsmetoden



figur 5

Ovenstående figur 5 viser forskel i restlevetider for mænd baseret på data for kalenderåret 1990. Et tilsvarende billede ses for andre kalenderår og for kvinder (dvs. den angivne figur er repræsentativ for andre kalenderår for både mænd og kvinder).

Det fremgår af figuren, at forskellen i forventet restlevetid mellem gruppe A og C er af mindre størrelsesorden, max. ca. 0,1 år, mens forskellen mellem gruppe B og de to øvrige grupper er større (op til ca. 0,5 år). I de ældre aldre indsnævres forskellen mellem de tre forskellige grupper.

## 8. Vurdering af populationsmetoden - dødelighed

Som nævnt i indledningen er emnet for denne rapport longevity (det forhold, at middellevetiden i en længere periode har været stigende). Populationsmetoden forudsætter, at den fremtidige dødelighed svarer til den seneste konstaterede dødelighed. Hvis dødeligheden fortsætter med at falde, vil populationsmetoden systematisk undervurdere de fremtidige stigninger i levealderen. I de næste kapitler behandles dette forhold i detaljer.

Vi har baseret vores analyser på en (december 2003) endnu ikke offentliggjort artikel "Prediction of old-age mortality" af Fledelius *et al.* (2002). I artiklen undersøges det, hvilken yderligere korrektion der historisk set ville have været behov for, såfremt den fremtidige dødelighed havde været beskrevet ved populationsmetoden.

Den valgte metode har en række fordele. Her skal især nævnes, at den er meget udbredt og forholdsvis nem at forstå. Metoden lægger meget stor vægt på historiske data og modelarbejdet er begrænset til en "anelse" kerneudglatning.

Den væsentligste ulempe ved metoden er, at når vi vælger at tillægge data så stor vægt, opstår der problemer i forhold til aktualiteten af resultaterne. Da vi har valgt at se på de langsigtede perspektiver, vejer fordelene dog langt tungere end ulemperne.

### 8.1 Kerneudglatning i forbindelse med estimation af dødeligheden

Ved estimation af den fremtidige dødelighed tager Fledelius *et al.* udgangspunkt i populationsmetoden med anvendelse af A-grupper, dvs.

$$\hat{\mu}_{x,y} = \frac{O_{x,y}^A}{E_{x,y}^A} \quad (8.1.1)$$

Her er antal dødsfald,  $O_{x,y}^A$ , og eksponeringstid,  $E_{x,y}^A$ , beskrevet ved (6.3.1) og (6.4.1).

Estimatoren (8.1.1) modificeres dog således, at der foretages en kerneudglatning af både antal dødsfald,  $O_{x,y}^A$ , og eksponeringstiden,  $E_{x,y}^A$ .

Den benyttede kerneudglatning er to-dimensionel over dels alder og dels kalendertid, og kernevægten er bestemt som det dobbelte produkt af Epanechnikov kernen.

Epanechnikov kernen er givet ved:

$$K^{Epan.}(x) = 0,75 \cdot (1 - x^2) \cdot I(|x| \leq 1) \quad (8.1.2)$$

Når vinduet  $b$  anvendes, er kernevægten for  $x_1$  ved udregning af den udglattede værdi i  $x$  derfor givet ved:

$$K_b^{Epan.}(x, x_1) = 0,75 \cdot \frac{1}{b} \cdot \left(1 - \left(\frac{x - x_1}{b}\right)^2\right) \cdot I(|x - x_1| \leq b) \quad (8.1.3)$$

Heraf følger, at anvendte kernevægt for kalenderår  $x_1$  og alder  $y_1$  vedrørende den udglattede værdi i kalenderår  $x$  og alder  $y$  er bestemt ved:

$$K_{b_1}^{Epan.}(x, x_1) \cdot K_{b_2}^{Epan.}(y, y_1) = \frac{0,75^2}{b_1 \cdot b_2} \cdot \left(1 - \left(\frac{x - x_1}{b_1}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{y - y_1}{b_2}\right)^2\right) \cdot I(|x - x_1| \leq b_1) \cdot I(|y - y_1| \leq b_2) \quad (8.1.4)$$

Og dermed er den kerneudglattede værdi vedrørende kalenderår  $x$  og alder  $y$  for antal dødsfald,  $\bar{O}_{x,y}^A$ , og eksponeringstiden,  $\bar{E}_{x,y}^A$ , resp. fastlagt ved:

$$\bar{O}_{x,y}^A = \sum_{x_1=1900}^{2001} \sum_{y_1=0}^{100} K_{b_1}^{Epan.}(x, x_1) \cdot K_{b_2}^{Epan.}(y, y_1) \cdot O_{x_1,y_1}^A \quad (8.1.5)$$

$$\bar{E}_{x,y}^A = \sum_{x_1=1900}^{2001} \sum_{y_1=0}^{100} K_{b_1}^{Epan.}(x, x_1) \cdot K_{b_2}^{Epan.}(y, y_1) \cdot E_{x_1,y_1}^A \quad (8.1.6)$$

Derudover benyttes i udregningerne  $b_1 = b_2 = 6$ .

Populationsmetoden benyttet af Fledelius *et al.* er nu givet som

$$\hat{\mu}_{x,y} = \frac{\overline{O}_{x,y}^A}{\overline{E}_{x,y}^A} \quad (8.1.7)$$

## 8.2 Validering ved anvendelse af back-testing

Fledelius *et al.* sammenligner den estimerede dødelighed med den faktiske konstaterede dødelighed (se eksempel senere i dette afsnit). Denne type af validering af en model betegnes back-testing.

Valideringen udvides endvidere til at omfatte funktioner af dødsintensiteterne, herunder overlevsandsynligheder, forventede restlevetider og livrenter. En given funktion baseret på dødsintensiteter bestemt ved populationsmetoden sammenlignes således med samme funktion baseret på faktisk dødelighed.

Fledelius *et al.* beregner både dødelighed ifølge populationsmetoden og faktiske dødeligheder ved (8.1.7).

Mere formelt bestemmes de estimerede dødsintensiteter ved populationsmetoden for kohorten, der har alder  $y'$  i år  $x'$ , ved:

$$\hat{\mu}_{x',y}^{\text{pop}} = \frac{\overline{O}_{x',y}^A}{\overline{E}_{x',y}^A}, y = y', \dots, 100 \quad (8.2.1)$$

Mens de faktiske dødsintensiteter for samme kohorte findes ved:

$$\hat{\mu}_{x,y}^{\text{fak}} = \frac{\overline{O}_{x,y}^A}{\overline{E}_{x,y}^A}, y = y', \dots, 100, \text{ og } x = x' - y' + y \quad (8.2.2)$$

(8.2.1) og (8.2.2) sammenlignes nu for hvert  $y$ , eller som funktioner af disse dødsintensiteter.

I forbindelse med back-testing er det væsentligt, at der ikke er sammenfald mellem de data, der benyttes til estimation og de data, der indgår i bestemmelse af de faktiske observerede dødsintensiteter (back-testen). I vores konkrete tilfælde er der et vist sammenfald mellem data, der indgår til bestemmelse af dødeligheden ifølge populationsmetoden, og data vedrørende faktisk dødelighed i de nærmeste år efter året, som populationsmetoden er baseret på. Dette skyldes kerneudglatningen og antallet af år, hvor der er sammenfald, afhænger af vinduesbredden. Vi vurderer, at sammenfaldet er uden væsentlig betydning, idet en eventuel korrektion af (8.2.1) og (8.2.2) ikke vil ændre ved de konklusioner, vi drager på basis af den anvendte back-test.

### 8.2.1 Eksempel

Fledelius *et al.* tager i alle deres eksempler udgangspunkt i en 65-årig og antager desuden, at den maksimale alder er 100 år.

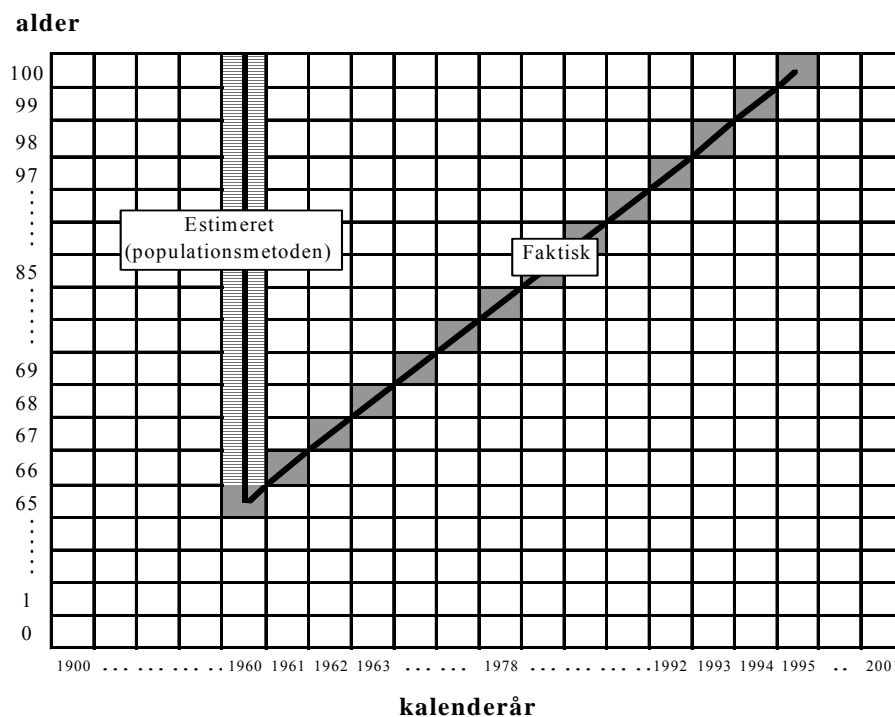
Ved anvendelse af populationsmetoden i 1960 til estimation af den fremtidige dødelighed for de 65-årige i dette år (dvs. kohorte 1895), findes denne som:

$$\hat{\mu}_{1960,y}^{\text{pop}} = \frac{\overline{O}_{1960,y}^A}{\overline{E}_{1960,y}^A}, y = 65, \dots, 100 \quad (8.2.1.1)$$

Denne dødelighed sammenlignes med den faktiske dødelighed for samme kohorte ved back-test, dvs. (8.2.1.1) sammenlignes med

$$\hat{\mu}_{x,y}^{\text{fak}} = \frac{\overline{O}_{x,y}^A}{\overline{E}_{x,y}^A}, y = 65, \dots, 100, \text{ og } x = 1895 + y \quad (8.2.1.2)$$

I nedenstående figur 6 er forskellen mellem de to dødeligheder også illustreret:



figur 6

### 8.3 Forholdet mellem estimerede og faktiske dødsintensiteter

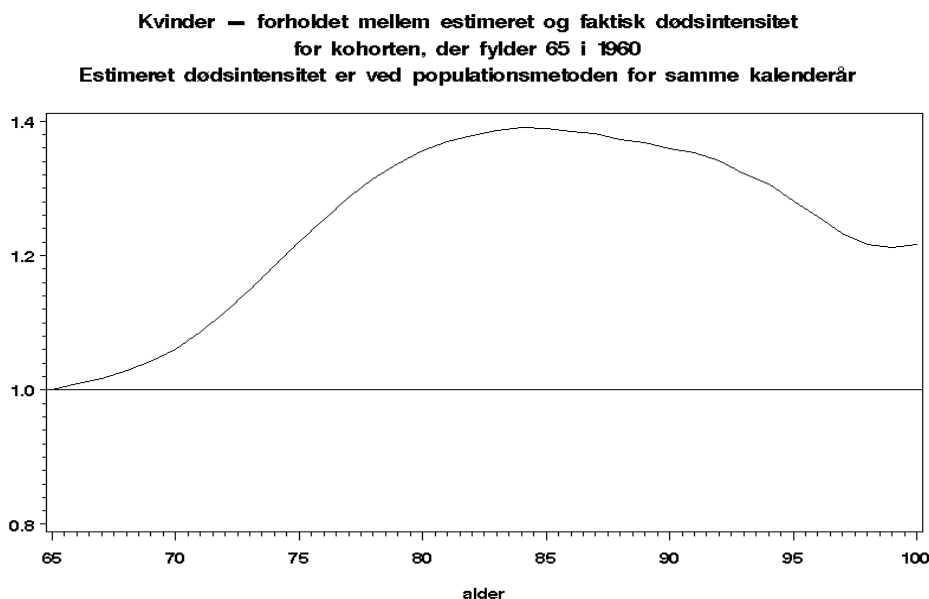
For en række kalenderår beregnes de estimerede fremtidige dødeligheder ifølge populationsmetoden for kohorten, som fylder 65 år i det givne kalenderår. Disse estimerede dødeligheder sammenlignes med de dødeligheder, som rent faktisk indtraf i de efterfølgende år for denne kohorte (jf. figur 6).

Vi har valgt at illustrere forholdet mellem dødeligheden ifølge populationsmetoden og den faktiske dødelighed ved kvotienten mellem disse to størrelser, jf. eksemplet herunder.

### 8.3.1 Eksempel

Den fremtidige dødelighed estimeres i 1960 ved populationsmetoden for kohorten, som er 65 år i dette kalenderår, dvs. kohorte 1895. De faktiske dødeligheder for denne kohorte findes i kalenderårene 1960 frem til 1995, hvor kohorten bliver 100 år.

I nedenstående figur 7 er forholdet mellem estimeret og faktisk dødelighed angivet for denne kohorte (kvinder):



figur 7

Fx angiver værdien på ca. 1,4 i alder 85, at populationsmetoden har overvurderet den faktiske dødelighed med ca. 40 % i denne alder.

Som det fremgår af figuren, er forholdet for alle aldre større end 1, dvs. at populationsmetoden i dette eksempel har estimeret dødeligheden for højt i alle aldre fra 65 år til 100 år.

### 8.4 Forholdet mellem estimerede og faktiske restlevetider.

På baggrund af de enkelte års dødsintensiteter kan vi beregne de forventede restlevetider for en 65-årig både ud fra populationsmetodens dødeligheder og de faktiske dødeligheder. Disse to forventede restlevetider afbildes som funktion af kalenderåret, hvor kohorten fylder 65 (dvs. kalenderåret afspejler både det år, den pågældende kohorte fylder 65 år, og året for anvendelsen af populationsmetoden til estimation af den fremtidige dødelighed for denne kohorte).

Vi har data til og med år 2001 og betragter alene kohorter, hvor vi har registreringer for den faktiske dødelighed frem til og med det fyldte 100 år. Den seneste kohorte, vi analyserer, er derfor danskere født i 1901. Denne kohorte fyldte 65 i året 1966.

Ved hjælp af formlen (16.3.2) kan den forventede restlevetid i år  $x$  for en 65-årig med dødelighed ifølge populationsmetoden,  $\hat{\mu}_{x,y}^{\text{pop}}$ , jf. (8.2.1), bestemmes ved:

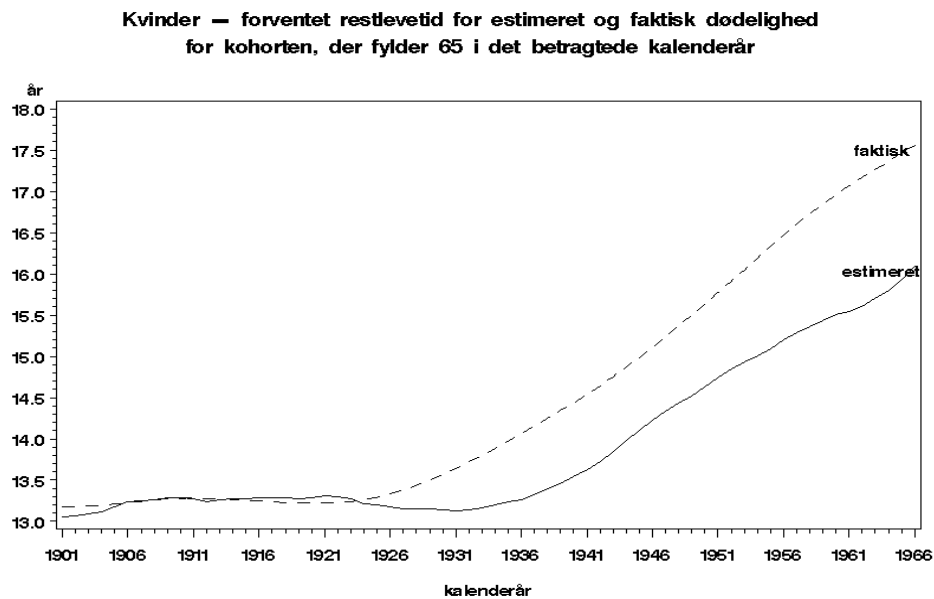
$$\sum_{t=65}^{100} \left( \exp\left(-\sum_{u=65}^{t-1} \hat{\mu}_{x,u}^{\text{pop}}\right) \cdot \frac{1}{\hat{\mu}_{x,t}^{\text{pop}}} \cdot (1 - \exp(-\hat{\mu}_{x,t}^{\text{pop}})) \right) \quad (8.5.1)$$

Tilsvarende er den forventede restlevetid i år  $x$  for en 65-årig bestemt ud fra den faktiske dødelighed,  $\hat{\mu}_{x,y}^{\text{fak}}$ , jf. (8.2.2), givet ved:

$$\sum_{t=65}^{100} \left( \exp\left(-\sum_{u=65}^{t-1} \hat{\mu}_{x+u-65,u}^{\text{fak}}\right) \cdot \frac{1}{\hat{\mu}_{x+t-65,t}^{\text{fak}}} \cdot (1 - \exp(-\hat{\mu}_{x+t-65,t}^{\text{fak}})) \right) \quad (8.5.2)$$

Restlevetiderne givet ved (8.5.1) skal kort betegnes forventet restlevetid for estimeret dødelighed (da vi alene betragter populationsmetoden i denne rapport til estimation af fremtidig dødelighed, bør betegnelsen ikke give anledning til misforståelser). Tilsvarende vil vi betegne (8.5.2) for den forventede restlevetid for faktisk dødelighed.

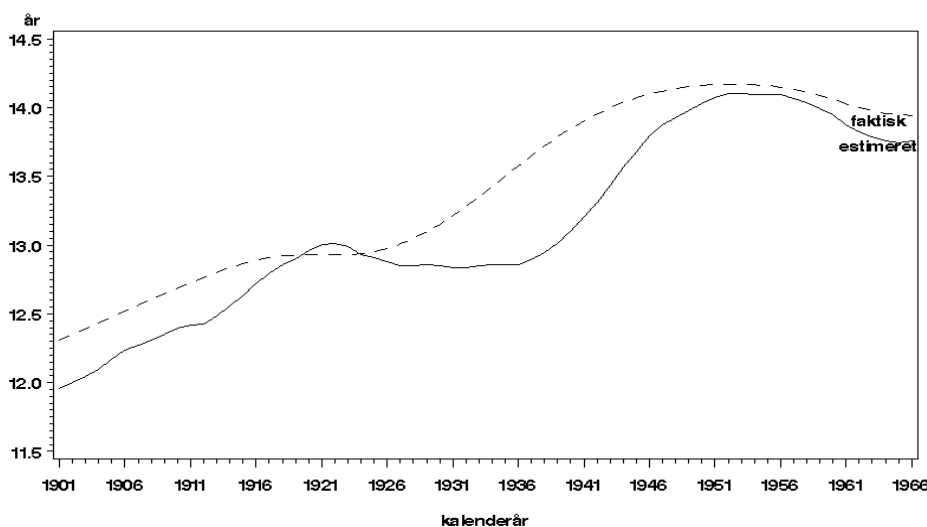
I figurerne 8 (kvinder) og 9 (mænd) nedenfor er den forventede restlevetid for estimeret og faktisk dødelighed for de 65-årige optegnet som funktion af kalenderåret (dvs. det år kohorten fylder 65):



figur 8



Mænd – forventet restlevetid for estimeret og faktisk dødelighed for kohorten, der fylder 65 i det betragtede kalenderår



figur 9

Det overordnede billede for begge køn er, at den forventede restlevetid for faktisk dødelighed har været stigende gennem den betragtede periode. Fx levede 65-årige kvinder i 1966 ca. 4,4 år længere end deres jævnaldrende i 1901, mens det tilsvarende tal for mænd var 1,6 år. Det fremgår også ved sammenligning af de to figurer, at 65-årige kvinder for alle årene har haft en højere faktisk forventet restlevetid end mændene, og at denne forskel er øget gennem perioden.

Med hensyn til populationsmetodens estimation af forventet restlevetid for faktisk dødelighed viser graferne følgende: For kvinder har populationsmetoden frem til ca. 1922 estimeret den forventede restlevetid for faktisk dødelighed tilfredsstillende. Herefter har populationsmetoden for kvinder estimeret forventet restlevetid for faktisk dødelighed for lavt. Forskellen mellem de to restlevetider har været op til ca. 1,6 år (kalenderår 1966). For mændene har populationsmetoden stort set for alle årene undervurderet den forventede restlevetid for faktisk dødelighed. Forskellen mellem de to restlevetider har været op til ca. 0,8 år (kalenderår 1938).

## 9. Vurdering af populationsmetoden - hensættelser

Beregningen af pensionshensættelser er bl.a. baseret på forudsætninger om den fremtidige dødelighed. Når dødeligheden ændres, ændres derfor også hensættelserne. Ændring i dødelighed har størst betydning for de livsvarige livrenter blandt de forskellige typer af forsikringsprodukter og langt den overvejende del af ATP's hensættelser vedrører livsvarige livrenter. I denne rapport fokuserer vi derfor udelukkende på livsvarige livrenter, når vi undersøger den finansielle effekt af longevity.

I det efterfølgende sammenlignes livsvarige livrenter baseret på dødeligheden estimeret ud fra populationsmetoden med livsvarige livrenter baseret på den faktiske dødelighed.

(Vi skal indskyde, at den livsvarige livrente er en kort skrivemåde for den forventede nutidsværdi af den kontinuerte betalingsstrøm på 1 kr., så længe forsikringstager lever. Vi skal endvidere bemærke, at en livsvarig livrente principielt dannes ved at tilføje diskonteringsfaktorer til overle-

velsessandsynligheder. Dermed svarer forventet restlevetid til en livsvarig livrente med en rentefod lig nul).

Ved hjælp af formel (16.4.3) kan livrenter i år  $x$  for en 65-årig for estimeret dødelighed,  $\hat{\mu}_{x,y}^{pop}$ , jf. (8.2.1), bestemmes ved:

$$\bar{a}_{x,65}^{pop} = \sum_{t=65}^{100} (\exp(-\sum_{u=65}^{t-1} (\delta + \hat{\mu}_{x,u}^{pop}))) \cdot \frac{1}{\delta + \hat{\mu}_{x,t}^{pop}} \cdot (1 - \exp(-(\delta + \hat{\mu}_{x,t}^{pop}))) \quad (9.1)$$

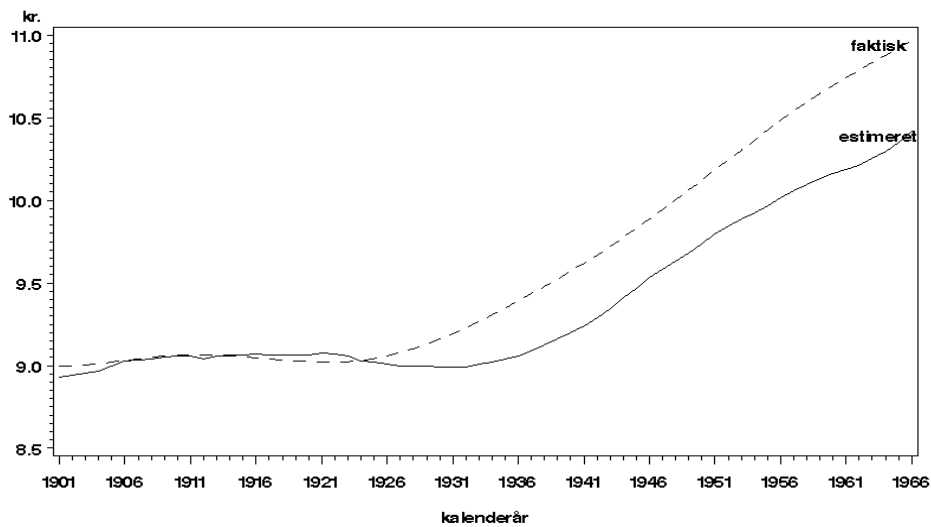
Her er  $\delta = \log(1 + i)$ , hvor  $i$  er diskonteringsrenten.

Tilsvarende er livrenter i år  $x$  for en 65-årig for faktisk dødelighed,  $\hat{\mu}_{x,y}^{fak}$ , jf. (8.2.2), givet ved:

$$\bar{a}_{x,65}^{fak} = \sum_{t=65}^{100} (\exp(-\sum_{u=65}^{t-1} (\delta + \hat{\mu}_{x+u-65,u}^{fak}))) \cdot \frac{1}{\delta + \hat{\mu}_{x+t-65,t}^{fak}} \cdot (1 - \exp(-(\delta + \hat{\mu}_{x+t-65,t}^{fak}))) \quad (9.2)$$

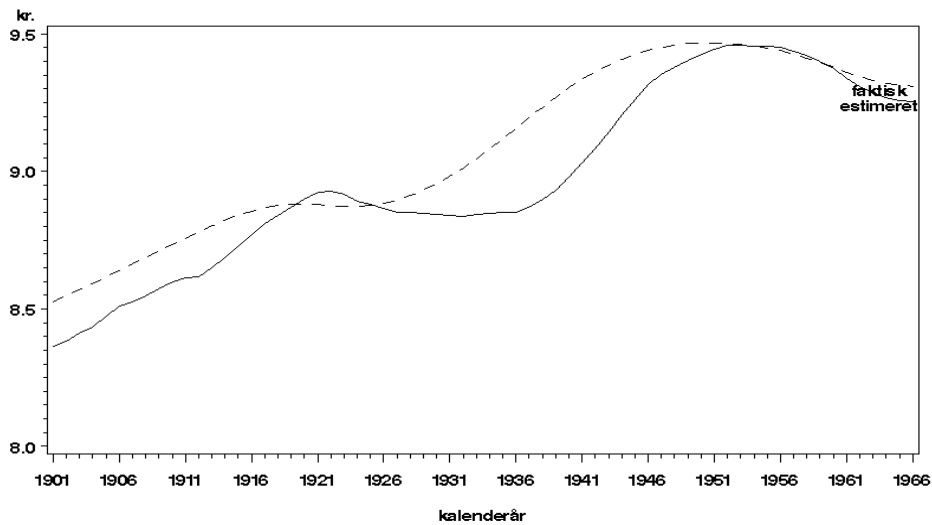
Livrenter for dels estimeret og dels faktisk dødelighed er optegnet som funktion af kalenderåret ved anvendelse af en 5 % diskonteringsrente i nedenstående figur 10 (kvinder) og 11 (mænd):

**Kvinder — livrenter for estimeret og faktisk dødelighed ved diskonteringsrenten 5 %, og for kohorten, der fylder 65 i det betragtede kalenderår**



figur 10

Mænd — livrenter for estimeret og faktisk dødelighed  
ved diskonteringsrenten 5 %, og for kohorten, der fylder 65 i det betragtede kalenderår



figur 11

Som vi havde forventet, minder figur 10 og 11 meget om figur 8 og 9 (det generelle niveau er lavere som følge af anvendelse af diskonteringsrenten). Den stigende værdi vedrørende faktiske dødeligheder viser, at longevity-effekten har stor indflydelse på størrelsen af den livsvarige livrente. Forskellen mellem livrenterne viser, at historisk set medfører populationsmetoden oftest en undervurdering af størrelsen af livrenten for faktisk dødelighed. Forskellen mellem livrenter for faktisk og estimeret dødelighed udgør således op til 0,6 (kalenderår 1966) for kvinder og 0,3 (kalenderår 1938) for mænd.

## 10. Vurdering af populationsmetoden - rentereduktion

Til at beskrive forskellen mellem livsvarige livrenter for estimeret og faktisk dødelighed indfører Fledelius *et al.* en ekstra forrentning udover diskonteringsrenten. Ekstra forrentningen tillægges således diskonteringsrenten ved beregning af livrenter for faktisk dødelighed. Forskellen angives nu som den ekstra forrentning, hvormed de to livrenter er lig hinanden.

Det forekommer umiddelbart mere anvendeligt at lade livrenter for estimeret dødelighed være udgangspunktet svarende til beregningerne ved opgørelse af hensættelserne. I denne rapport anvendes derfor i stedet en rentereduktion til diskonteringsrenten. Med denne tilgang opgøres livrenter for estimeret dødelighed diskonteret med diskonteringsrenten fratrukket rentereduktionen. Den rentereduktion, hvormed de to livrenter er ens, angiver så forskellen.

Beskrives ovenstående matematisk, findes det  $\varepsilon$ , hvormed

$$\bar{a}_{x,65,\varepsilon}^{\text{pop}} = \sum_{t=65}^{100} \left( \exp\left(-\sum_{u=65}^{t-1} (\delta_{i,\varepsilon} + \hat{\mu}_{x,u}^{\text{pop}})\right) \cdot \frac{1}{\delta_{i,\varepsilon} + \hat{\mu}_{x,t}^{\text{pop}}} \cdot (1 - \exp(-(\delta_{i,\varepsilon} + \hat{\mu}_{x,t}^{\text{pop}}))) \right) \quad (10.1)$$

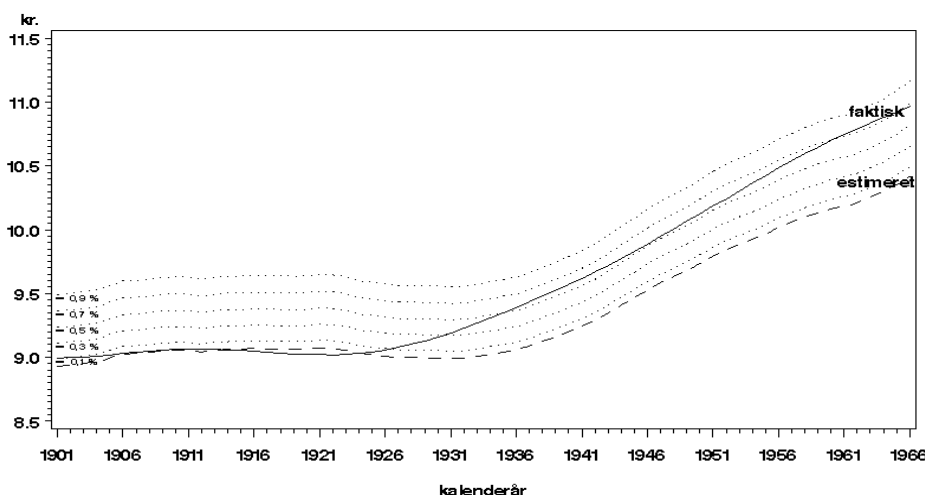
er lig  $\bar{a}_{x,65}^{\text{fak}}$ , jf. (9.2). Her er  $\delta_{i,\varepsilon} = \log(1 + i - \varepsilon)$ . Det er endvidere underforstået, at  $\varepsilon$  afhænger af kalenderåret  $x$ .

Det  $\varepsilon$ , der opfylder, at (10.1) og (9.2) er lig hinanden, skal også kort betegnes den nødvendige rentereduktion.

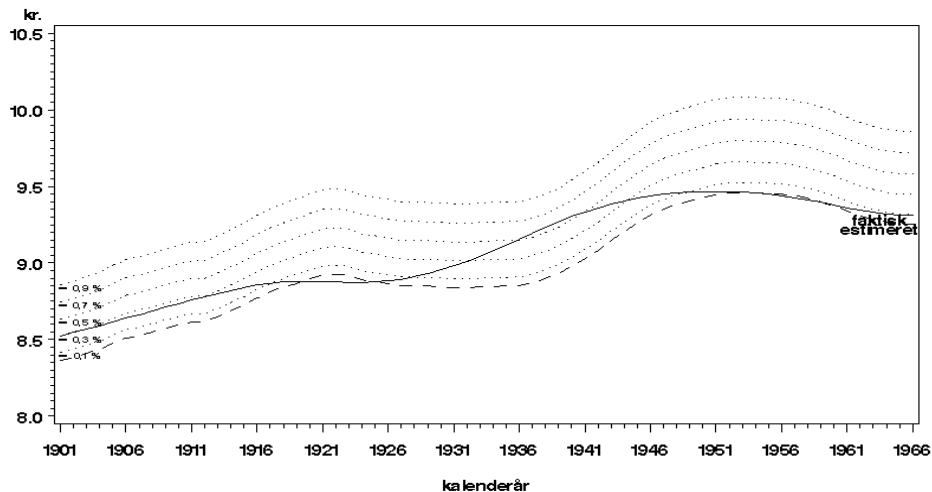
I stedet for at bestemme det eksakte  $\varepsilon$  har vi i første omgang sammenlignet (10.1) med (9.2) for forskellige passende værdier af  $\varepsilon$ .

I figur 12 (kvinder) og 13 (mænd) herunder har vi afbildet den livsvarige livrente som funktion af kalenderåret ved anvendelse af en 5 % diskonteringsrente med estimeret og faktisk dødelighed ved forskellige rentereduktioner.

**Kvinder – livrenter for estimeret og faktisk dødelighed  
ved diskonteringsrente 5 % og for kohorten, der fylder 65 i betragtede kalenderår  
I livrenter for estimeret dødelighed indgår forskellige rentereduktioner**



**Mænd — livrenter for estimeret og faktisk dødelighed  
ved diskonteringsrente 5 % og for kohorten, der fylder 65 i betragtede kalenderår  
I livrenter for estimeret dødelighed indgår forskellige rentereduktioner**

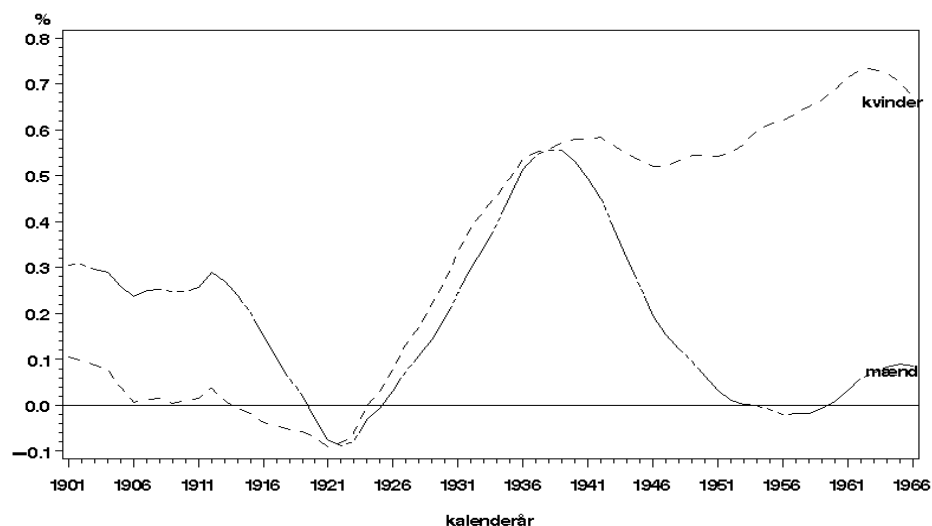


figur 13

Det fremgår af figur 12 og 13, at den nødvendige rentereduktion varierer noget gennem den betragtede periode. Det ses endvidere, at der har været perioder, hvor rentereduktionen har været negativ svarende til en stigning i dødeligheden. Overordnet betragtet sikrer et sikkerhedstillæg bestående af en rentereduktion på omkring 0,8 % for kvinder og 0,6 % for mænd, at livrenten beregnet for estimeret dødelighed er til den sikre side ved sammenligning med livrenter for faktisk dødelighed.

I figur 12 og 13 har vi som nævnt beregnet hensættelserne for passende diskrete værdier af rentereduktionen  $\varepsilon$ . Herunder vil vi beregne den nøjagtige rentereduktion ved hjælp af numeriske metoder til løsning af ikke-lineære ligninger. Resultaterne fremgår af figur 14 for både kvinder og mænd:

**De to køn — rentereduktion hvor livrenter med estimeret resp. faktisk dødelighed er ens  
ved diskonteringsrente 5 %, og for kohorten, der fylder 65 i betragtede kalenderår**

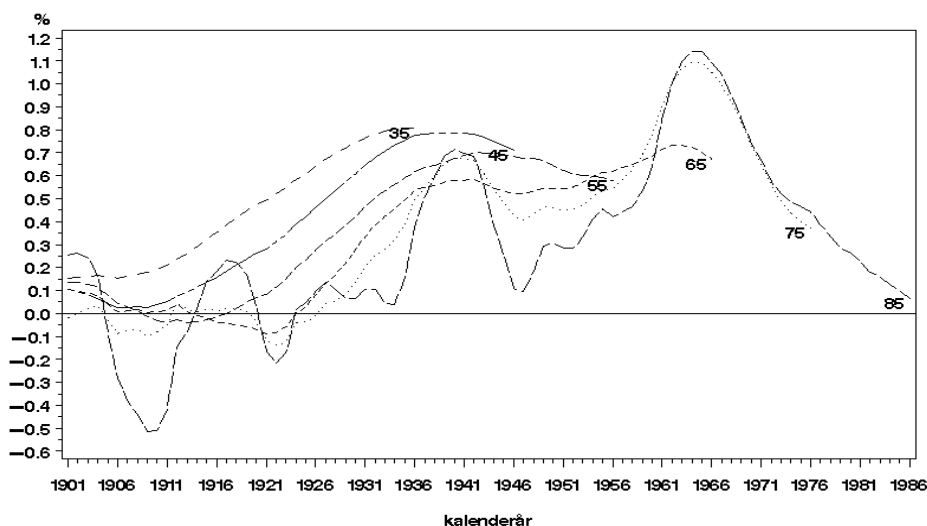


figur 14

Konklusionerne er naturligvis de samme ud fra figur 14 som ud fra figur 12 og 13, men figur 14 er måske mere illustrativ end de to forrige figurer. Det fremgår fx tydeligere af figur 14, at mænd og kvinder har forskellig forløb med hensyn til den nødvendige rentereduktion til sikring af tilstrækkelige hensættelser for livrenter. I begyndelse af den betragtede periode var rentereduktionen således større for mænd end for kvinder, men dette billede vendte i resten af den betragtede periode.

Hidtil har vi alene betragtet de 65-årige. I figur 15 har vi illustreret rentereduktionen bestemt for forskellige udvalgte aldre (for kvinder).

**Kvinder – rentereduktion hvor livrenter med estimeret resp. faktisk dødelighed er ens for forskellige aldre, og ved diskonteringsrente 5 %**



figur 15

Figur 15 kræver nok lidt nærmere forklaring. Betragter vi kohorten af kvinder fra 1885, vil den i kalenderåret 1920 være 35 år. En sammenligning af pensionsforpligtelserne for denne kohorte på dette tidspunkt opgjort med estimeret og faktisk dødelighed (svarende til figurene 12 og 14) fører til en rentereduktion på ca. 0,5 %. Betragtes den samme kohorte i kalenderåret 1940, vil den på dette tidspunkt være 55 år. En sammenligning af pensionsforpligtelserne for denne kohorte på dette tidspunkt opgjort med estimeret og faktisk dødelighed (igen svarende til figurene 12 og 14) fører nu til en rentereduktion på ca. 0,7 %.

Vi bemærker, at den maksimale rentereduktion varierer en del med alderen. For de 35-årige er den over 0,8 % og for de 75- og 85-årige ca. 1,1 %. Vi bemærker endvidere, at variationen er kraftigst for de 75- og 85-årige.

Tilsvarende undersøgelse for mænd viser et lignende resultat som figur 15 (dog er niveauet for rentereduktionen lavere).

## 11. Vurdering af dødeligheden - bestandsbetragtninger

I kapitlerne ovenfor har vi analyseret dødsintensiteter, restlevetider og rentereduktioner på kohorteniveau. I dette kapitel ønsker vi at analysere dødelighedseffekter på en hel forsikringsbestand.

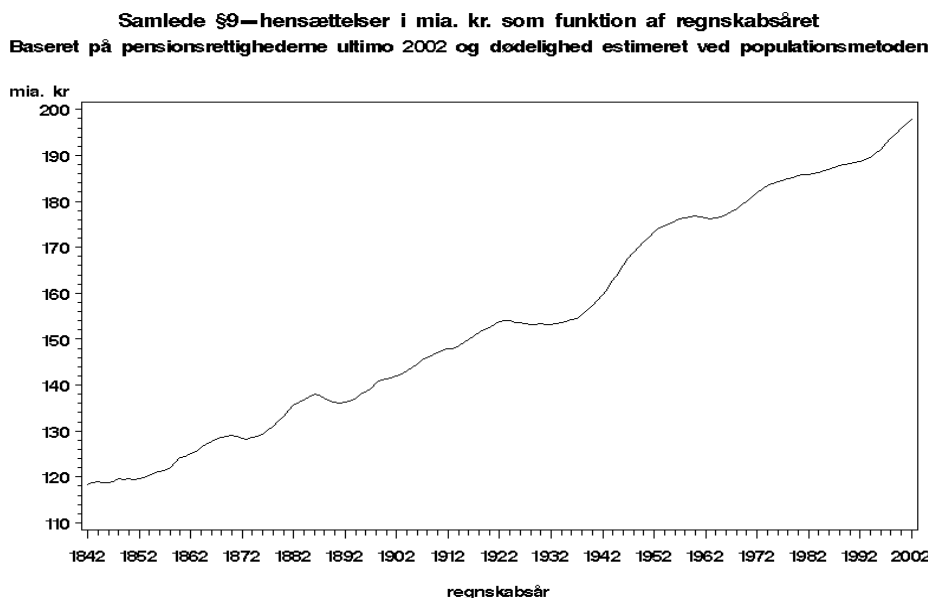
### 11.1 Dødelighedens betydning for de samlede pensionsmæssige hensættelser

Først vil vi illustrere dødelighedens betydning for de pensionsmæssige hensættelser. De samlede pensionsmæssige hensættelser afhænger bl.a. af

- bestandens sammensætning
- renteforudsætninger, og
- dødelighedsforudsætninger

Da vi ønsker at analysere betydningen af ændringer i dødeligheden, har vi valgt at fastholde forudsætningerne om bestandens sammensætning og renten. Vi tager således udgangspunkt i ATP's samlede bestand af livsvarige livrenter (§ 9-pensionsrettigheder) ultimo 2002 opdelt på køn og kohorter og antager, at denne bestand af rettigheder har været gældende også historisk set. Renten holdes fast svarende til markedsrenten ultimo 2002 (= 4,2985 %).

For perioden fra 1842 til 2002 estimerer vi ultimo hvert år dødeligheden efter populationsmetoden. På baggrund af fastholdt bestand og rente beregner vi de samlede hensættelser ultimo hvert år med den estimerede dødelighed, se nedenstående figur 16.



figur 16

I den betragtede periode stiger hensættelserne fra ca. 120 mia. kr. til ca. 200 mia. kr. Stigningen har været forholdsvis jævn over hele perioden og der er kun ganske korte perioder, hvor hensættelserne er faldende.

## 11.2 Vurdering af populationsmetoden – bestandsbetragtninger

I dette afsnit ønsker vi at vurdere populationsmetoden på bestandsniveau. Vi benytter samme bestands- og renteforudsætninger som i afsnittet ovenfor.

For hvert kalenderår ønsker vi at bestemme den nødvendige rentereduktion, dvs.:

Vi beregner de samlede hensættelser for bestanden med faktiske dødeligheder. Disse hensættelser sammenligner vi med hensættelserne for bestanden opgjort ud fra populationsmetodens dødelighed og med en reduktion af renten. Den nødvendige rentereduktion findes herefter som den rentereduktion, for hvilket de to hensættelser er ens.

For at lette sammenligningen har vi valgt at foretage beregningerne for samme aldersgrupper for alle kalenderår<sup>2</sup>.

Matematisk beskrevet findes altså det  $\varepsilon$  i kalenderår  $x$ , hvormed

$$\sum_{y=x_{\text{sen}}-(2001-100)}^{100} \left( \sum_{l \in \{k,m\}} p_{2002,y,l} \bar{a}_{x,y,l,\varepsilon}^{\text{pop}} \right) = \sum_{y=x_{\text{sen}}-(2001-100)}^{100} \left( \sum_{l \in \{k,m\}} p_{2002,y,l} \bar{a}_{x,y,l}^{\text{fak}} \right)$$

Her er  $x_{\text{sen}}$ , det seneste kalenderår, hvor vi bestemmer en nødvendig rentereduktion, dvs. det skal gælde, at  $x \leq x_{\text{sen}}$ . Endvidere er  $p_{2002,y}$  de samlede (§ 9-) pensionsrettigheder ultimo 2002 for alder  $y$ , mens variabelen  $l$  refererer til kønnet ( $k/m$ ). Jf. i øvrigt formel (9.2) og (10.1).

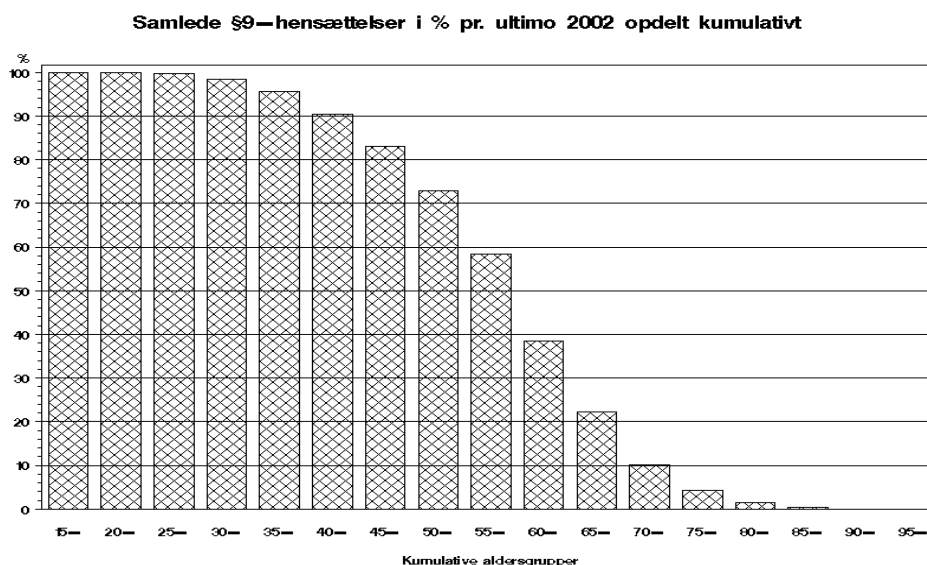
Det ses af formlerne, at jo senere et kalenderår  $x_{\text{sen}}$  vi vælger ved beregningen af den nødvendige rentereduktion på bestandsniveau, jo højere er mindstealderen for de kohorter, vi kan medtage i beregningerne. Forklaringen på dette er, at vi kun betragter kohorter, hvor vi har registreret dødeligheden frem til alder 100.

Af figur 17 herunder fremgår det, at hovedparten af hensættelserne (beregnet med 2001-dødelighed for ATP's bestand) vedrører de midaldrende og ældre. 73 % af § 9-hensættelserne vedrører således gruppen af de 50-årige og ældre. På baggrund af figuren har vi valgt at analysere bestande svarende til aldre større end eller lig 39, 49, 59, 69 og 79.

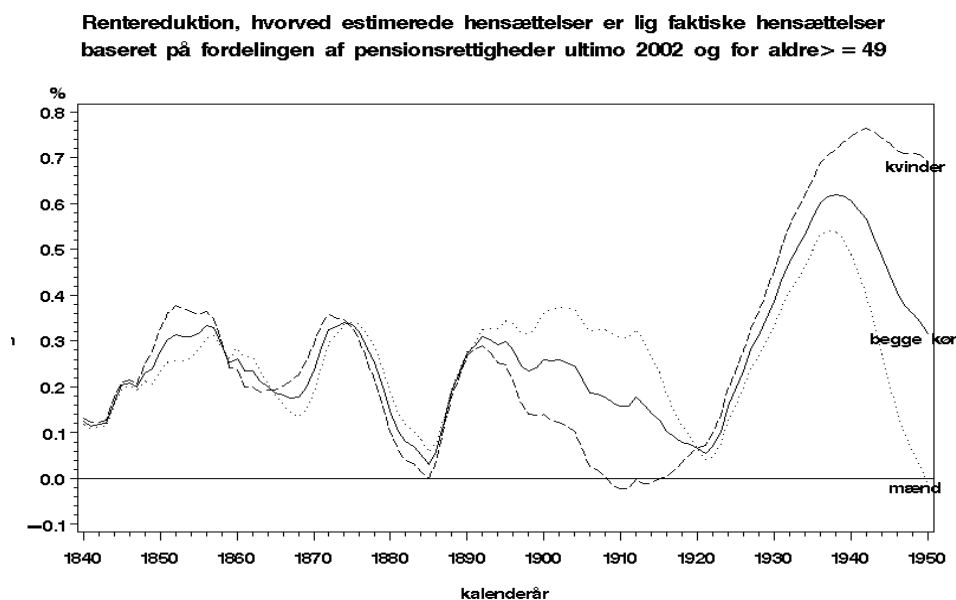
<sup>2</sup> Alternativt kan vi tage udgangspunkt i et kalenderår,  $x_{\text{sen}}$ , og så gradvis anvende yngre og yngre aldre jo tidligere kalenderår, vi sammenligner. Dvs. for  $x \leq x_{\text{sen}}$ , finder vi det  $\varepsilon$ , hvor:

$$\sum_{y=x-(2001-100)}^{100} \left( \sum_{l \in \{k,m\}} p_{2002,y,l} \bar{a}_{x,y,l,\varepsilon}^{\text{pop}} \right) = \sum_{y=x-(2001-100)}^{100} \left( \sum_{l \in \{k,m\}} p_{2002,y,l} \bar{a}_{x,y,l}^{\text{fak}} \right)$$





figur 17



figur 18

Af figur 18 fremgår resultaterne for de seneste 110 års dødeligheder, vi kan analysere for bestanden fra alder 49 frem til alder 100 (disse år omfatter kohorterne fra 1791 frem til 1901). For kalenderåret 1930 er der på figuren angivet en rentereduktion på ca. 0,4 %. Dette resultat betyder, at hvis vi havde anvendt populationsmetoden i 1930 og anvendt en rentereduktion på 0,4 % som sikkerhedstillæg til diskonteringsrenten, ville vi dermed have haft tilstrækkelige hensættelser til at indfri de faktiske udbetalinger (i perioden 1930 til 1981) for bestanden.

De tilsvarende resultater med hensyn til bestande for aldre større end eller lig 39, 59, 69 og 79, kan ses i appendiks 1. Vi har valgt at summere resultaterne i følgende tabel 1:

Fraktiler for den nødvendige rentereduktion (i %)  
som funktion af mindstealderen, der indgår i beregningerne

Fraktiler i %	al-dre $\geq$ 39	al-dre $\geq$ 49	al-dre $\geq$ 59	al-dre $\geq$ 69	al-dre $\geq$ 79
99	0,61	0,62	0,62	0,73	0,97
95	0,58	0,59	0,57	0,68	0,78
90	0,44	0,46	0,43	0,56	0,60
75	0,33	0,32	0,29	0,33	0,31
50	0,26	0,25	0,23	0,19	0,18
25	0,20	0,17	0,11	0,06	-0,01
10	0,15	0,10	0,02	-0,09	-0,22
5	0,14	0,07	-0,02	-0,13	-0,45
1	0,11	0,05	-0,06	-0,19	-0,65

tabel 1

Tabellen skal læses på følgende vis: For bestanden af pensionsrettigheder med mindstealder 39 har der i 50 % af de betragtede år været behov for en rentereduktion på op til 0,26 % for at tage højde for udviklingen i dødeligheden. Hvis vi ønsker en højere sikkerhed, øges den nødvendige rentereduktion (som eksempel har 90 % sikkerhed historisk set krævet en rentereduktion på 0,44 % for aldre over 39). Det fremgår af tabellen, at medianen (50 % fraktilen) falder svagt med stigende alder, men variationen (og dermed de høje fraktiler) stiger med alderen.

## 12. Populationsmetoden - konklusioner

Undersøgelserne ovenfor indikerer, at populationsmetoden estimerer den fremtidige dødelighed tilfredsstillende, idet der dog samtidig er behov for at anvende en rentereduktion til opgørelsesrenten/markedsrenten som et sikkerhedstillæg/finansieringstillæg.

Analyserne i de foregående kapitler giver os et billede af, hvilken grad af sikkerhed en given rentereduktion ville have givet historisk set på ATP's nuværende bestand. En rentereduktion på 0,6 % havde historisk set givet sikkerhed på ca. 95 %, en rentereduktion på 0,5 % havde givet sikkerhed på ca. 90 %, en rentereduktion på 0,3 % en sikkerhed på ca. 75 % og en rentereduktion på 0,25 % havde historisk set givet sikkerhed på ca. 50 %.

## 13. ATP's nuværende dødelighedsgrundlag

ATP anvender i dag et dynamisk dødelighedsgrundlag. Det dynamiske består i, at grundlaget opdateres årligt. I dette kapitel gennemgår vi kort principperne i ATP's nuværende dødelighedsgrundlag og vurderer grundlaget på baggrund af analyserne i de foregående kapitler.

ATP's dynamiske dødelighedsgrundlag kan beskrives ved:

1. en årlig opdatering af dødelighedsforudsætningerne svarende til seneste års konstaterede dødelighed
2. et sikkerhedstillæg/finansieringstillæg

Den årlige opdatering af dødeligheden foretages ved hjælp af metoder, der svarer til populationsmetoden beskrevet i de forrige kapitler.

Sikkerheds- eller finansieringstillægget afhænger af, hvornår bidragene er indbetalt. For bidrag indbetalt fra og med 2002 (den nye ATP-ordning) består tillægget af en eksplicit rentereduktion på 0,5 %. For bidrag til og med 2001 (den gamle ATP-ordning) består tillægget af en aldersreduktion på ½ år. Denne aldersreduktion ækvivalerer p.t. med en rentereduktion på ca. 0,1 %.

I appendiks 2 har vi beskrevet ATP's dynamiske dødelighedsgrundlag mere detaljeret.

Vi har i denne rapport anskueliggjort, at populationsmetoden i kombination med en rentereduktion til opgørelsesrenten/markedsrenten som et sikkerheds- eller finansieringstillæg estimerer den fremtidige dødelighed tilfredsstillende. Det er derfor vores konklusion, at ATP's dødelighedsgrundlag er konstrueret hensigtsmæssigt.

ATP bestemmer som nævnt det seneste års dødelighed ved en metode, der grundlæggende svarer til populationsmetoden. Vi kan derfor benytte resultaterne i denne rapport vedrørende den nødvendige rentereduktion direkte til vurdering af sikkerhedstillægget i ATP's dødelighedsgrundlag.

## 14. Det videre arbejde

Med denne rapport har vi afsluttet første del af analyserne vedrørende longevity. Vi er på nuværende tidspunkt ved at etablere et samarbejde med Københavns Universitet vedrørende specialevejledning af 2 studerende.

Vi forventer, at de næste skridt vedrørende longevity bliver:

- Analyser af dødelighed i de ældste aldre
- Kohortedødeligheder, dvs. analyser af sammenhængen mellem dødeligheden i unge og i ældre aldre
- Fordele og ulemper ved at anvende (parametriserede) modeller

## 15. Referencer

- ANDREEV, K (1999). Demographic surfaces: Estimation, Assessment and Presentation, with application to Danish Mortality, 1835-1995. Ph.D. Thesis. University of Southern Denmark.
- BORGAN, Ø. (1986). Lecture notes in life history analysis. Preliminary version (July 1986). Institute of Mathematics, University of Oslo.
- FLEDELIUS, P., NIELSEN, J. P. (2002). Prediction of old-age mortality. Ikke publiceret (december 2003).
- KEIDING, N. (1990). Statistical inference in the Lexis diagram. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **332**, 487-509.
- MATTHIESSEN, P. C. (1970). *Teoretisk Demografi*. Københavns Universitet.

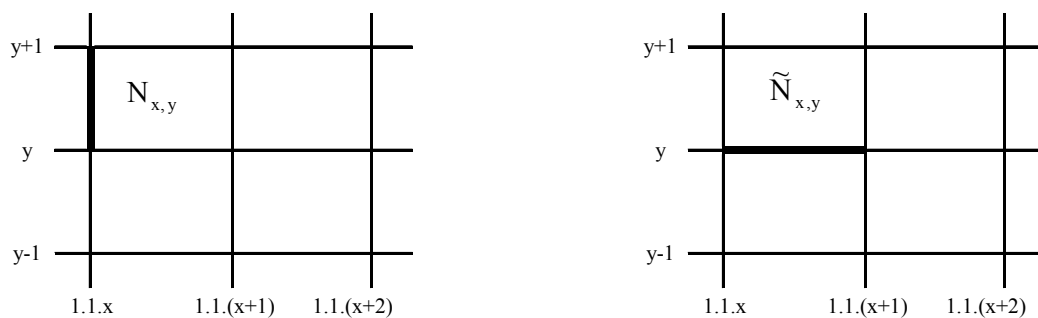
## 16. Formler m.v.

Nedenfor følger en række formelbestemmelser m.v.

### 16.1 Anden metode til bestemmelse af eksponeringen

I afsnit 6.3 tilnærmes eksponeringen ved hjælp af populationen opgjort pr. 1.1. I overensstemmelse med den ovenfor benyttede notation skal denne population betegnes  $N_{x,y}$ . I stedet for anvendelse af  $N_{x,y}$ -erne kan eksponeringen også tilnærmes ved populationen, som fylder en given alder i løbet af kalenderåret. Lad denne population være betegnet  $\tilde{N}_{x,y}$ .

I nedenstående figur 19 er forskellen på  $N_{x,y}$  og  $\tilde{N}_{x,y}$  illustreret:



figur 19

Med udgangspunkt i  $\tilde{N}_{x,y}$ -erne tilnærmes eksponeringen som følger:

$${}^A \tilde{E}_{x,y} = \frac{1}{2} \times (\tilde{N}_{x,y} + \tilde{N}_{x,y+1}) \quad (16.1.1)$$

$${}^B \tilde{E}_{x,y} = \tilde{N}_{x,y} \quad (16.1.2)$$

$${}^C \tilde{E}_{x,y} = \frac{1}{2} \times (\tilde{N}_{x,y} + \tilde{N}_{x+1,y+1}) \quad (16.1.3)$$

I det efterfølgende afsnit 16.2 er angivet formel til beregning af  $\tilde{N}_{x,y}$ .

### 16.2 Bestemmelse af $\tilde{N}_{x,y}$

I Andreev's Ph.d.-afhandling, s. 82, angives følgende formel til beregning af  $\tilde{N}_{x,y}$ :

$$\tilde{N}_{x,y} = \frac{1}{2} \times ((N_{x,y-1} - {}^2D_{x,y-1}) + (N_{x+1,y} + {}^1D_{x,y})) \quad (16.2.1)$$

Formlen eftervises nedenfor:

Hvis  $M$  betegner nettoindvandringen, og denne opdeles svarende til antal dødsfald, så gælder det, at

$$\tilde{N}_{x,y} = N_{x,y-1} - {}^2D_{x,y-1} + {}^2M_{x,y-1} \quad (16.2.2)$$

Det gælder endvidere, at

$$N_{x+1,y} = N_{x,y-1} - {}^2D_{x,y-1} - {}^1D_{x,y} + {}^2M_{x,y-1} + {}^1M_{x,y} \quad (16.2.3)$$

Når nettoindvandringen er ligeligt fordelt, og dermed  ${}^1M_{x,y} = {}^2M_{x,y-1}$ , så kan (16.2.3) også skrives

$$2 \times {}^2M_{x,y-1} = -N_{x,y-1} + {}^2D_{x,y-1} + N_{x+1,y} + {}^1D_{x,y} \quad (16.2.4)$$

dvs.

$${}^2M_{x,y-1} = \frac{1}{2} \times (-N_{x,y-1} + {}^2D_{x,y-1} + N_{x+1,y} + {}^1D_{x,y}) \quad (16.2.5)$$

(16.2.1) følger nu af (16.2.2) og (16.2.5).

### 16.3 Bestemmelse af forventet restlevetid

For den reelle og positive stokastiske variable  $Y \in \mathbb{R}_+$  er

$$EY = \int_0^{\infty} P(Y \geq s) ds \quad (16.3.1)$$

Når dødsintensiteterne antages konstante i helårige aldersintervaller, gælder det derfor, at forventet restlevetid i alder  $y$  er givet ved:

$$\begin{aligned} E(Y - y | Y \geq y) &= \int_0^{\infty} P(Y - y \geq s | Y \geq y) ds = \\ &= \int_y^{\infty} P(Y \geq s | Y \geq y) ds = \\ &= \sum_{t=y}^{\infty} \int_t^{t+1} P(Y \geq s | Y \geq y) ds = \\ &= \sum_{t=y}^{\infty} (P(Y \geq t | Y \geq y) \int_t^{t+1} P(Y \geq s | Y \geq t) ds) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=y}^{\infty} (\exp(-\int_y^t \mu_u du) \int_t^{t+1} \exp(-\int_t^s \mu_t du)) = \\ & \sum_{t=y}^{\infty} (\exp(-\sum_{u=y}^{t-1} \mu_u) \cdot [-\frac{1}{\mu_t} \cdot \exp(-\mu_t \cdot (s-t))]_t^{t+1}) = \\ & \sum_{t=y}^{\infty} (\exp(-\sum_{u=y}^{t-1} \mu_u) \cdot \frac{1}{\mu_t} \cdot (1 - \exp(-\mu_t))) . \end{aligned} \quad (16.3.2)$$

### 16.4 Bestemmelse af livsvarig livrente

Nutidsværdien i alder  $y$  af en livrente, der er opsat til alder 65, er givet ved

$$\int_{(65-y)v0}^{\infty} v^s \cdot I(Y \geq y+s) ds \quad (16.4.1)$$

Her er  $v = \frac{1}{1+i}$ , hvor  $i$  er diskonteringsrenten.

Dermed er den livsvarige livrente (annuiteten) i alder  $y$ ,  ${}_{(65-y)v0} \bar{a}_y$ , bestemt ved

$$E \left( \int_{(65-y)v0}^{\infty} v^s \cdot I(Y \geq y+s) ds \mid Y \geq y \right) = \int_{(65-y)v0}^{\infty} v^s \cdot P(Y \geq y+s \mid Y \geq y) ds \quad (16.4.2)$$

Antager vi, at dødsintensiteterne er konstante i helårige aldersintervaller, og sættes  $\delta = \log(1+i)$ , gælder det derfor, at

$$\begin{aligned} {}_{(65-y)v0} \bar{a}_y &= \int_{(65-y)v0}^{\infty} v^s \cdot P(Y \geq y+s \mid Y \geq y) ds = \\ & \int_{65vy}^{\infty} v^{s-y} \cdot P(Y \geq s \mid Y \geq y) ds = \\ & \sum_{t=(65vy)}^{\infty} \int_t^{t+1} v^{s-x} \cdot P(Y \geq s \mid Y \geq y) ds = \\ & \sum_{t=(65vy)}^{\infty} (v^{t-y} \cdot P(Y \geq t \mid Y \geq y) \int_t^{t+1} v^{s-t} \cdot P(Y \geq s \mid Y \geq t) ds) = \\ & \sum_{t=(65vy)}^{\infty} (\exp(-\int_y^t (\delta + \mu_u) du) \int_t^{t+1} \exp(-\int_t^s (\delta + \mu_t) du)) = \\ & \sum_{t=(65vy)}^{\infty} (\exp(-\sum_{u=y}^{t-1} (\delta + \mu_u)) \cdot [-\frac{1}{(\delta + \mu_t)} \cdot \exp(-(\delta + \mu_t) \cdot (s-t))]_t^{t+1}) = \\ & \sum_{t=(65vy)}^{\infty} (\exp(-\sum_{u=y}^{t-1} (\delta + \mu_u)) \cdot \frac{1}{(\delta + \mu_t)} \cdot (1 - \exp(-(\delta + \mu_t)))) \end{aligned} \quad (16.4.3)$$



## 17. SAS-programmer

Alle SAS-programmer er placeret i biblioteket "s:\aktu\Longevity\SAS-programmer\" i passende underbiblioteker hertil.

Beregning af dødsintensiteten for hver af de tre grupper (A, B og C) foretages i programmet "O\_E\_rater.sas", der er placeret i underbiblioteket "\Beregning af O-E-rater\". Sammensteds er placeret SAS-programmerne "Samln\_a\_b\_c\_numerisk.sas" og "Samln\_a\_b\_c\_grafisk.sas", der sammenligner dødsintensiteten  $\mu_{x,y}$  beregnet for de nævnte tre grupper, jf. afsnit 6.5 og figur 5.

Figureerne 4 til 11 i artiklen af Fledelius *et al.* (figurer 7 til 13 i denne rapport) dannes i SAS-programmer, der er placeret i underbiblioteket "\Genskabelse af Fledelius et al\". Underbibliotekerne hertil er selvforklarende.

Figur 14, 15 og 18 i denne artikel optegnes i SAS-programmer, der findes i underbiblioteket "\Overbygning på Fledelius et al\". Figur 14 og 15 således ved hjælp af programmet "Livrenter\_eksakt.sas", mens figur 18 ved "Rente\_hens.sas". Figur 16 og 17 dannes i programmerne "Hensaettelser.sas" og "Kumulativ\_hens.sas" resp. placeret i underbibliotek "\Udvikling i ATP's hensættelser\".

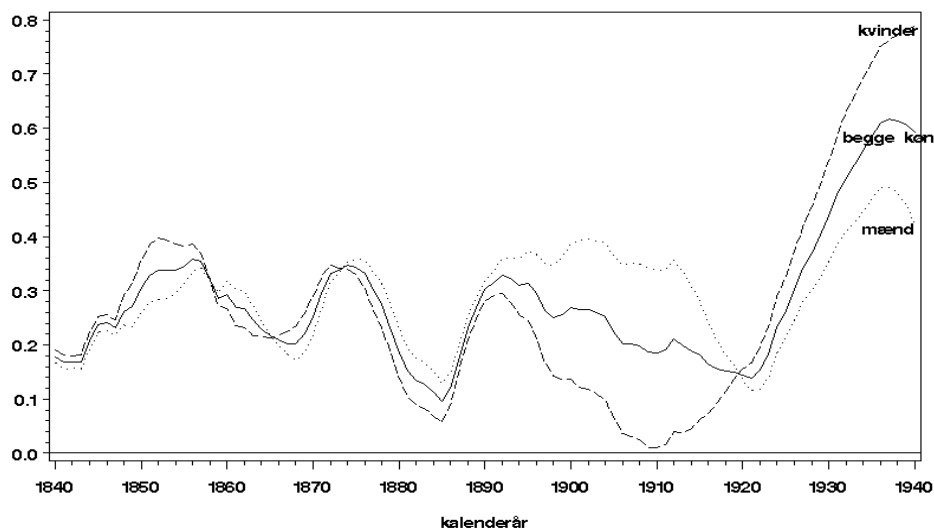
Endelig bestemmes fraktilerne i tabel 1 ved hjælp af SAS-programmet "Fraktiler\_rente.sas" i underbiblioteket "\Overbygning på Fledelius et al\".

## Appendiks 1

Nedenfor er optegnet den nødvendige rentereduktion vedrørende bestanden for forskellige aldre.

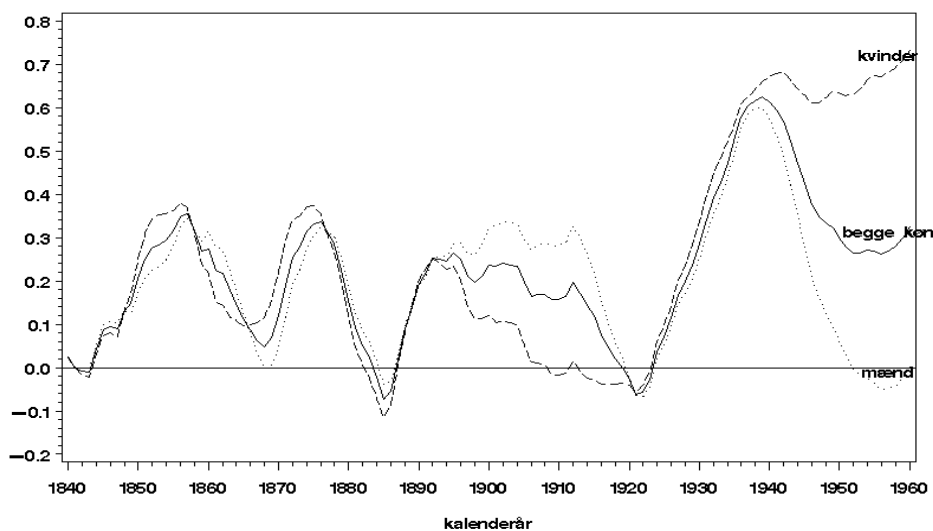
For aldre  $\geq 39$ :

**Rentereduktion, hvorved estimerede hensættelser er lig faktiske hensættelser baseret på fordelingen af pensionsrettigheder ultimo 2002 og for aldre  $> = 39$**



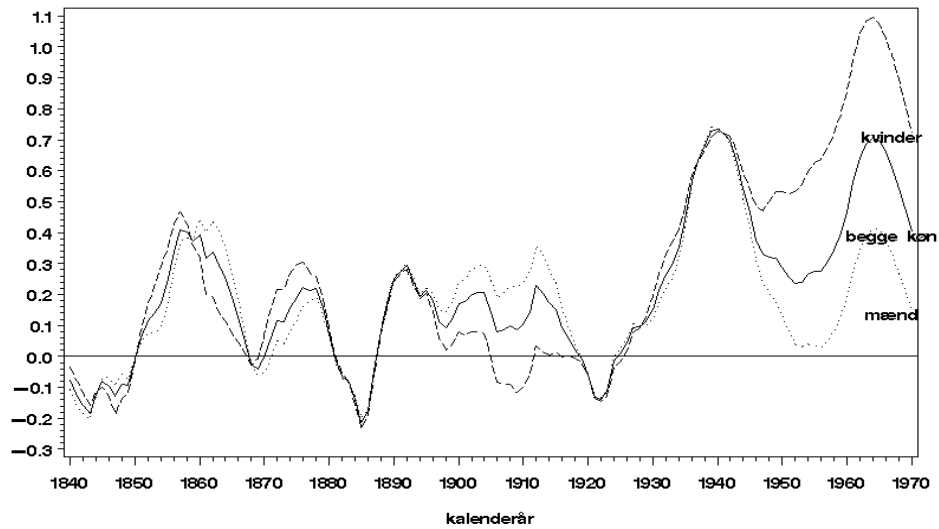
For aldre  $\geq 59$ :

**Rentereduktion, hvorved estimerede hensættelser er lig faktiske hensættelser baseret på fordelingen af pensionsrettigheder ultimo 2002 og for aldre  $> = 59$**



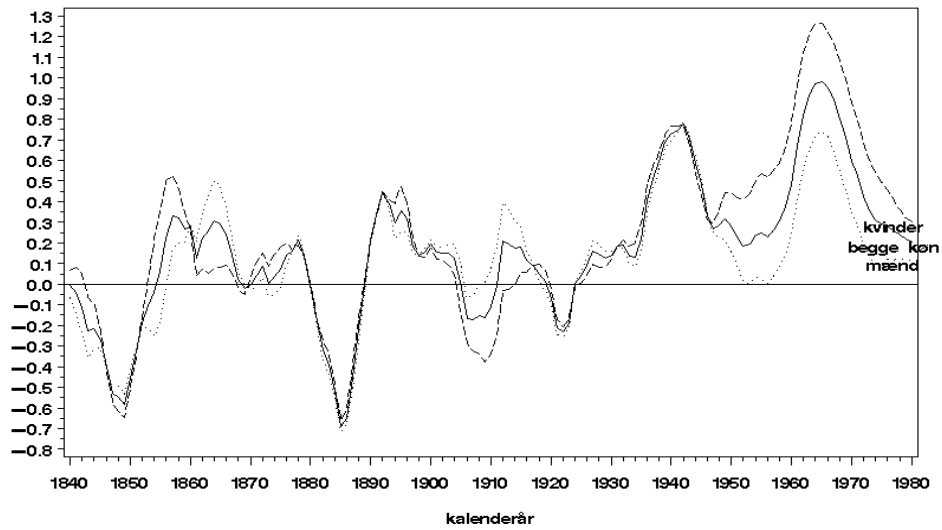
For aldre  $\geq 69$ :

**Rentereduktion, hvorved estimerede hensættelser er lig faktiske hensættelser baseret på fordelingen af pensionsrettigheder ultimo 2002 og for aldre  $> = 69$**



For aldre  $\geq 79$ :

**Rentereduktion, hvorved estimerede hensættelser er lig faktiske hensættelser baseret på fordelingen af pensionsrettigheder ultimo 2002 og for aldre  $> = 79$**



## Appendiks 2

ATP's dynamiske dødelighedsgrundlag består af

1. en årlig opdatering af dødelighedsforudsætningerne svarende til seneste års dødelighed
2. et sikkerhedstillæg

Nedenfor følger en matematisk/teknisk beskrivelse af 1., dvs. ATP's årlige opdatering af dødelighedsforudsætningerne svarende til seneste års dødelighed. Beskrivelsen er hentet fra ATP's Pensions- og hensættelsesgrundlag. Efterfølgende redegøres også for 2., dvs. sikkerhedstillægget.

Mænds og kvinders dødssandsynligheder  $q_{x,t}$  og  $q_{y,t}$  anvendt i år  $t$ , beregnes med udgangspunkt i den senest observerede dødelighed (år  $t-1$ ) for den del af ATP-bestanden, som er bosat i Danmark for henholdsvis mænd og kvinder. Dødssandsynlighederne kerneudglattes som vist nedenfor:

$$q_{x,t} = \frac{\tilde{N}_{x,t-1}}{\tilde{T}_{x,t-1}} = \frac{\sum_{s=16,\dots,119} \frac{1}{b} K\left(\frac{x-s}{b}\right) N_{x,s}}{\sum_{s=16,\dots,119} \frac{1}{b} K\left(\frac{x-s}{b}\right) T_{x,s}}$$

hvor  $K(\omega)$  er defineret ved

$$K(\omega) = \frac{15}{16} (1 - \omega^2)^2 \cdot I_{|\omega| \leq 1}$$

og hvor

$$b = 6$$

$$\tilde{N}_{x,t-1} = \text{antal beregnede dødsfald blandt } x\text{-årige mandlige medlemmer i år } t-1$$

$$\tilde{T}_{x,t-1} = \text{antal beregnede } x\text{-årige mandlige medlemmer i år } t-1$$

$$N_{x,s} = \text{konstaterede antal døde mandlige medlemmer i aldersintervallet } [x-s; x+s]$$

$$T_{x,s} = \text{observerede antal mandlige medlemmer i aldersintervallet } [x-s; x+s]$$

For aldre over 90 til og med 119 beregnes dødeligheden lineært med udgangspunkt i dødssandsynligheden for mænd i alder 90 med en årlig stigning på 0,0175:

$$q_{x,t} = \begin{cases} q_{90,t} + 0,0175 \times (x-90) & \text{for } 90 < x < 120 \\ 1 & \text{for } x \geq 120 \end{cases}$$

Med hensyn til sikkerhedstillægget afhænger dette af ordningen<sup>3</sup>. For den nye ordning i ATP anvender vi en reduktion i diskonterings-/markedsrenten på 0,5 % som sikkerhedstillæg. For den gamle ordning i ATP består sikkerhedstillægget af en aldersforskydning. Aldersforskydningen indebærer, at hvert medlem antages  $\frac{1}{2}$  år yngre end den faktiske alder. Teknisk set er denne forskydning i øvrigt en konsekvens af anvendelse af B-grupper.

---

<sup>3</sup> ATP består af to ordninger, den nye og den gamle ordning. Den nye ordning vedrører rettigheder optjent for bidrag for 2002 og senere, mens den gamle ordning vedrører rettigheder optjent for bidrag til og med 2001.